

Rescapitulación

Diferencia entre estados de superposición y mezclas estadísticas.

→ Se pueden distinguir al medir en distintas bases (usar distintos observables).

Fases globales y relativas

global $e^{i\phi} [a|1\rangle + b|2\rangle]$
sin significado físico

$a|1\rangle + e^{i\phi} b|2\rangle$
relativa sí afecta los resultados obtenidos.

6.4. Sistemas conservativos

CT III D-2

- Pensemos que H no depende de t . Entonces se conserva la energía.
- Consideremos la ecuación de eigenvalores para H dada por $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$
- Como H no depende de t tampoco dependen los e.v. ni e.V.
- Como los $|\varphi_n\rangle$ forman una base podemos escribir cualquier estado como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle$$

con $c_n(t) = \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle$.

- La dependencia temporal esta contenida en los $c_n(t)$
- Para calcular $c_n(t)$ usamos la Ec. de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle = \langle \varphi_n | H | \psi(t) \rangle$
- Como H es hermitiano podemos evaluar hacia la izquierda y reemplazar por E_n
- Entonces $i\hbar \frac{d}{dt} c_n(t) = E_n c_n(t)$
- Integrando $c_n(t) = c_n(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar}$
- Para encontrar la evolución temporal:
 - Escribir $|\psi(t_0)\rangle = \sum_n c_n(t_0) |\varphi_n\rangle$ en términos de una base de e.V. de H
 - Obtener $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_n\rangle$
- Si $|\psi(t_0)\rangle$ es un e.V. de H entonces

$$|\psi(t)\rangle = e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle$$

en este caso los estados $|\psi(t_0)\rangle$ y $|\psi(t)\rangle$ son físicamente indistinguibles. Las propiedades físicas asociadas a ellos no cambian con el tiempo. Por esto los e.V. son estados estacionarios.

- Mencionar que las fases dentro de la suma si tienen un efecto.
- de este modo, si medimos que el sistema está en un e.V. de energía, permanecerá con esta misma energía.
- ~~Hablar del operador de evolución.~~

¿Cómo obtener $|\psi\rangle$ y E en primer lugar?
 Discutiremos esto para la descripción en la base de posición.

CT 1.D

Partículas en potenciales independientes del tiempo

Queremos resolver $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ $H = \frac{p^2}{2m} + V(R)$

Proyectando a la base de posición $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle \vec{r} | H | \psi \rangle = E \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{eq de e-valores}$$

Otra forma de llegar a esto:

D-1-a. Existence of stationary states

Let us see if there exist solutions of this equation of the form:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \chi(t) \quad (\text{D-2})$$

Substituting (D-2) into (D-1), we obtain:

$$i\hbar \varphi(\mathbf{r}) \frac{d\chi(t)}{dt} = \chi(t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\mathbf{r}) \right] + \chi(t) V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{D-3})$$

If we divide both sides by the product $\varphi(\mathbf{r}) \chi(t)$, we find:

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(\mathbf{r})} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\mathbf{r}) \right] + V(\mathbf{r}) \quad (\text{D-4})$$

This equation equates a function of t only (left-hand side) and a function of \mathbf{r} only (right-hand side). This equality is only possible if each of these functions is in fact a constant, which we shall set equal to $\hbar\omega$, where ω has the dimensions of an angular frequency.

Setting the left-hand side equal to $\hbar\omega$, we obtain for $\chi(t)$ a differential equation which can easily be integrated to give:

$$\chi(t) = A e^{-i\omega t} \quad (\text{D-5})$$

In the same way, $\varphi(\mathbf{r})$ must satisfy the equation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) = \hbar\omega \varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{D-6})$$

If we set $A = 1$ in equation (D-5) [which is possible if we incorporate, for example, the constant A in $\varphi(\mathbf{r})$], we achieve the following result: the function

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{D-7})$$

is a solution of the Schrödinger equation, on the condition that $\varphi(\mathbf{r})$ is a solution of (D-6). The time and space variables are said to have been separated.

Equation (D-6) can therefore be written:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \varphi(\mathbf{r}) = E \varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{D-8})$$

or:

$$\boxed{H \varphi(\mathbf{r}) = E \varphi(\mathbf{r})} \quad (\text{D-9})$$

where H is the differential operator:

$$\boxed{H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r})} \quad (\text{D-10})$$

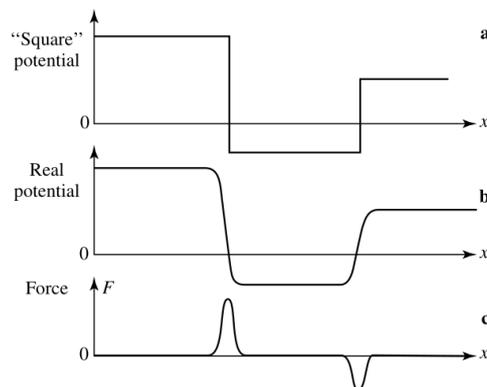
H is a linear operator since, if λ_1 and λ_2 are constants, we have:

$$H[\lambda_1 \varphi_1(\mathbf{r}) + \lambda_2 \varphi_2(\mathbf{r})] = \lambda_1 H \varphi_1(\mathbf{r}) + \lambda_2 H \varphi_2(\mathbf{r}) \quad (\text{D-11})$$

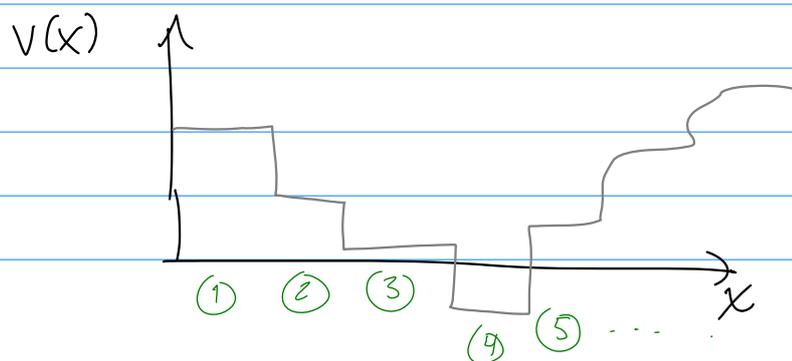
→ Dado un $V(\vec{r})$ se define una ecuación de e-valores

→ $V(\vec{r})$ se escoge según el problema físico a tratar

→ Comenzaremos por tratar problemas en 1D con los potenciales más sencillos.



$$F = -\frac{dV}{dx}$$



1. Behavior of a stationary wave function $\varphi(x)$

1-a. Regions of constant potential energy

In the case of a square potential, $V(x)$ is a constant function $V(x) = V$ in certain regions of space. In such a region, equation (D-8) of Chapter I can be written:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi(x) = 0 \quad (1)$$

We shall distinguish between several cases:

(i) $E > V$

Let us introduce the positive constant k , defined by

$$E - V = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2)$$

The solution of equation (1) can then be written:

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + A' e^{-ikx} \quad (3)$$

63

where A and A' are complex constants.

(ii) $E < V$

This condition corresponds to regions of space which would be forbidden to the particle by the laws of classical mechanics. In this case, we introduce the positive constant ρ defined by:

$$V - E = \frac{\hbar^2 \rho^2}{2m} \quad (4)$$

and the solution of (1) can be written:

$$\varphi(x) = B e^{\rho x} + B' e^{-\rho x} \quad (5)$$

where B and B' are complex constants.

(iii) $E = V$. In this special case, $\varphi(x)$ is a linear function of x .